

2^{ème} BAC Pro
Lycée Laymoun

Fonction Primitive :

Prof: | YAZOUGH
MOHAMED

'Activité': 1°) on considère trois fcts : F , G et H tq :

$$F(x) = x^2 ; G(x) = x^2 - \sqrt{2} \text{ et } H(x) = x^2 + \frac{1}{5} \text{ pour } \forall x \in \mathbb{R}.$$

calculer : $F'(x)$; $G'(x)$ et $H'(x)$.

2°) on considère la fct f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 2x$

2-a) Déterminer une fct F tq : $F'(x) = f(x)$

2-b) F est-elle unique?

2-c) Déterminer une fct G tq : $G'(x) = f(x)$ et $G(1) = 0$.

① Déf d'une fct primitive :

Déf f est une fct numérique déf sur un intervalle I .

on appelle fct primitive de f sur l'intervalle I , toute fct F tq :

- 1 F est dérivable sur I .
- et $(\forall x \in I); F'(x) = f(x)$.

Exemple: $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$; $I =]0, +\infty[$; $F(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

on a : F dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$ sur I donc F est une primitive de f sur I .

propriétés:

① si F est une primitive de f sur I ; les autres primitives sont de la forme : $x \mapsto F(x) + k$; avec $k \in \mathbb{R}$ constante.

② Toute fct continue sur un intervalle I admet une fct primitive sur I .

③ si F et G sont des primitives de f et g alors : $F + G$ est une primitive de $f + g$

④ si F est une primitive de f sur I ; pour tout $k \in \mathbb{R}$; $k \times F$ est une primitive de $k \times f$

Thm : f déf sur un intervalle I et $x_0 \in I$. supposons que f admet une primitive sur I , alors : pour toute $y_0 \in \mathbb{R}$: il existe une seule primitive F de f sur I tq : $F(x_0) = y_0$.

Exple : $I = \mathbb{R}$; $f(x) = x^4 + 2$ $x_0 = 1$; $y_0 = -2$
 une primitive de f s'écrit : $F(x) = \frac{x^5}{5} + 2x + k$; ($k \in \mathbb{R}$)
 on a : $F(x_0) = y_0 = -2 \Rightarrow \frac{1}{5} + 2 + k = -2 \Rightarrow k = -\frac{21}{5}$

② Primitives des fcts usuelles :

la fct f	les fcts primitives de f sur I	I
$x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto kx + C$ ($C \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + C$ ($C \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ ($C \in \mathbb{R}$) ($n \in \mathbb{N}^*$)	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + C$; ($C \in \mathbb{R}$)	$]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + C$; ($C \in \mathbb{R}$)	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + C$; ($C \in \mathbb{R}$)	$]0, +\infty[$
$x \mapsto x^r$ ($r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\}$)	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$; ($C \in \mathbb{R}$)	$]0, +\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}

③ Fcts primitives et opérations :

f déf sur I	fct primitive sur I	Reqs :
$u' \times u^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$	$u \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u > 0$ sur I
$u' \times u^r$ ($r \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	
$u' + v'$	$u + v$	
$u v' + u' v$	$u v$	
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	$v \neq 0$ sur I

Fct primitive

n°5